

fiks!



ČESKÉ
VYSOKÉ
UČENÍ
TECHNICKÉ
V PRAZE

FIT

Fitácký Informatický Korespondenční Seminář

Ročník 2017/2018, 1. kolo

Co je to FIKS?

FIKS je Fitácký Informatický Korespondenční Seminář pro středoškolské studenty pořádaný Fakultou informačních technologií ČVUT v Praze. Byl založen na podzim roku 2013 a nyní tak probíhá čtvrtý ročník (samozřejmě číslujeme od nuly). Nabízí možnost potrápit tvůj mozek řešením algoritmických úloh různé obtížnosti, od snadných po zapeklité, na nichž se můžeš leccos nového naučit a podstatně se zdokonalit.

Jak to probíhá?

Jeden ročník se skládá z několika kol a následného soustředění pro nejlepší řešitele. V těchto kolech, která trvají vždy přibližně dva měsíce, máš možnost v teple domova řešit dané úlohy, a své řešení nám potom odešleš. My ti toto řešení opravíme, obodujeme a pošleme zpět, aby ses mohl poučit ze svých chyb. Spolu s tím zveřejníme vzorové řešení, které můžeš prostudovat a třeba se něco přiučit. Získané body se sčítají do konečného žebříčku, ze kterého vybereme ty nejlepší a pozveme je na již zmíněné soustředění.

Proč řešit FIKS?

Řešením každého problému, se kterým se potýkáme, se zdokonalujeme. Zde ti nabízíme možnost pořádně se zamyslet nad zajímavými algoritmickými problémy, vyzkoušet své algoritmické myšlení a programátorské dovednosti a naučit se spoustu nových věcí.

Také je to možnost seznámení s novými lidmi, které baví informatika, programování, matematika a přemýšlení vůbec. Těm nejlepším jsme schopni garantovat přijetí na FIT ČVUT bez přijímacích zkoušek.

Jak se můžu zapojit?

Začni nejprve tím, že se zaregistruješ na našich webových stránkách na adrese <http://fiks.fit.cvut.cz>. Potom si stáhni zadání úloh (nebo využij tuto brožurku), vyřeš je a své řešení nám tamtéž odevzdej.

Typy úloh

Celkem se ve FIKSu můžeš setkat se třemi typy úloh. O který typ úlohy se jedná, je vždy uvedeno u konkrétního zadání úlohy.

Nejčastěji se u nás potkáš s úlohami typu *Rozmysli, popiš a naprogramuj*. U každé úlohy tohoto typu se odevzdává jak popis algoritmu (s odhadem asymptotické složitosti), tak i zdrojový kód řešení problému v tebou zvoleném jazyce (jakýkoliv vyšší programovací jazyk dle tvé volby, například C, Java, Pascal, apod.).

Dalším typem jsou úlohy *Zamysli se*. Tyto úlohy jsou obvykle více teoretické a vyžadují, aby ses nad nimi důkladně zamyslel. Oproti předchozímu typu úloh nemusíš nic programovat, odevzdává se pouze slovní popis řešení problému.

Pokud nemáš rád teoretické úlohy a raději by sis procvičil/a své programátorské umění, pak pro je pro tebe určena kategorie *Odpověz Sfinze*. V úlohách tohoto typu po tobě nechceme popis algoritmu, je však potřeba vyřešit daný problém a toto řešení pak precizně naprogramovat. Oproti ostatním typům úloh se navíc okamžitě dozvíš, zda je tvé řešení správné, protože ho můžeš okamžitě odevzdat do našeho vyhodnocovacího systému.

Další a podrobnější informace nalezneš na našich webových stránkách.

Milý řešiteli FIKSu!

Po letní pauze nastal čas nažhavit závity a opět se pustit do řešení nových zapeklitých úloh, které na tebe ve FIKSu čekají. Stejně jako v loňském ročníku se můžeš těšit na celkem tři kola po pěti úlohách.

V rukou držíš brožurku obsahující zadání 1. kola letošního ročníku FIKSu. Pokud jsi nový řešitel, tak nezoufej, jelikož na vedlejší stránce si můžeš přečíst základní informace, které k řešení úloh budeš potřebovat. Pokud jsi již někdy FIKS řešil, tak věz, že v této brožurce naleznáš v kompaktní formě všechna zadání pro 1. kolo. Tak či onak ti nic nebrání vrhnout se do řešení úloh.

V letošním ročníku tě na cestě při řešení úloh bude doprovázet učeň Martien. A nepůjde jen tak o ledajakou cestu, neboť se společně s Martienem podíváš do země naplněné magií jménem Vallar.

Ještě před řešením úloh si můžeš přečíst příběh uvozující dobrodružství, která s Martienem v tomto kole prožiješ. S každým dalším kolem se dozvíš další kus příběhu, jehož velkolepé finále proběhne na jarním soustředění.

Tvoji organizátoři

Fitácký Informatický Korespondenční Seminář

Ročník 2017/2018, 1. kolo

Začátek kola: 4. 9. 2017 20:00
Termín odevzdání: 19. 11. 2017 23:59
Odevzdávání: Přes webové rozhraní na <http://fiks.fit.cvut.cz>
Další informace: <http://fiks.fit.cvut.cz>
kontakt@fiks.fit.cvut.cz

fiks!

Kapitola 0

Bylo šero, ale měsíc v úplňku již zářil svým mdlým světlem na poklidné městečko Algore. Zčerstva podzimem nabarvené stromy se jemně pohupovaly do svěžího vánku. V tento den se Martien Katcher vždy chystá na svůj již tradiční výlet k nedalekému rybníčku uprostřed lesa. Na tomto místě se touto dobou slétává nemalé množství zvláštních rozličně barevných kachniček, které zde provádí něco, co by se dalo nazvat tréninkem - provozují let ve formacích, rychlé ponory, plavání pozadu... K Martienovu úžasu jsou barvy i činnosti každý rok jiné.

„Tak už vyřáším,“ oznámil Martien svým rodičům, házeje si přes rameno svou brašnu, v ní zápisník, pero, inkoust a láhev vody. V celé své horlivosti ani nečekal na odpověď a vyšel z malého osamocené domku na samém okraji městečka přes zahradu směrem k náměstí.

Martien byl zrovna zaduman nad tím, kolik taková kachnička dokáže udělat ponorů za minutu, když na náměstí hned vedle pamětního stromu málem vrazil do starosty Algore, Johana Johanského, který vykonával svou obvyklou pochůzku po městečku. „Aah, to jsi ty Martiene, vyřáčíš na kachničky?“ vykřikl Johanský. Martien starostovi čas od času vypomáhal s úřednickou prací, za to měl volný přístup do knihovny na radnici. „Přeji hezký večer pane starosto, ano, ano, mám takový pocit, že dnes zažiju něco velkolepého, hned zítra vám přinesu zápis mých pozorování“ usmál se Martien. „Poslyš, donesly se ke mně zprávy, že v lese něco poničilo velkou část nové výsadby borovic, šlo nejspíše o divoká prasata, tak abys na jedno velkolepě nenarazil,“ výstražným tónem řekl Johanský. „Opravdu? Děkuji za varování, budu dávat pozor,“ odvětil Martien, nicméně v duchu věděl, že se nemá čeho bát. Při jeho četných výletech se mu již mnohokrát stalo, že k němu divoká zvířata přišla až na dosah ruky, nechala se hladit i krmit, odpočívala v jeho blízkosti. Dokonce se mu jednou stalo, že ho laň nechala svézt na jejím hřbetě. Martien jako vždy podal starostovi ruku, rozloučil se a vydal se opět na cestu.

Netrvalo to ani hodinu a Martien stál u břehu rybníčku a nemohl si pomoci se nesmát - před ním se v překážkové dráze postavené z mrkví proháněly modré, červené, žluté a snad i růžové kachničky. Sedl si na svůj oblíbený pařez a svým vlastním rychlopisem rychle zaznamenával vše, co viděl. Takto tam naprosto fascinován setrval až do hluboké noci...

Martien procházel teď již spícím Algorem. Vládlo až neobvykle velké ticho a na cestu mu svítil pouze měsíc na bezoblačné obloze. Martien šel svižným krokem, protože již bylo poněkud chladno. Přes náměstí, kolem pamětního stromu a úzkou uličkou rovnou k zahradě. Když k ní došel, vrátka byla dokořán. Martien si byl jist, že je zavřel, přeci jen mu onen akt zavření vrátek rodiče v dětství vštěpovali takovým způsobem, jakoby na jejich zavření závisel jeho život. Možná přišel někdo na návštěvu a nedovřel je? Potichu je zavřel a šel pomalu zahradou. Před ním se ukázal měsícem osvětlený domek a Martiena zamrazilo... Dveře dokořán, všechna okna dokořán, v celém domě tma až na jednu svíci stojící na stole v hlavním pokoji. Ostražitě prošel dveřmi, všechny věci byly rozházeny po pokoji. Opatrným hlasem se zeptal: „Mami? Tati?“ Žádná odpověď. Zkusil to ještě jednou, ale opět se nikdo neozýval. Prošel všechny pokoje, nikde nikdo, jen opět vypadaly jako by je někdo obrátil vzhůru nohama. Celý v šoku se skácel do jediné stojící židle u stolu. Pár okamžiků uběhlo a všiml si, že na stole vedle svíce leží zapečetěný dopis a popsany

list. Bylo poznat, že jde o písmo Martienova otce, nicméně list byl zjevně psaný ve spěchu. „Doufali jsme, že to takhle neskončí. Není moc času, vem dopis s pečeti a utíkej ke starostovi, on ti už poví víc. Milujeme tě a vždy na tebe budeme myslet, mamka a tat. . .“ list náhle skončil, jako by někdo Martienovu otcí vytrhl pero z ruky. Zahleděl se na dopis s tmavěmodrou pečeti dvouocasého lva a zahnal slzy deroucí se mu do očí. Na nic víc nečekal. Popadl dopis a upaloval k domu starosty Johaňšika.

Kapitola 1

Ostré bušení na dveře probudilo starostu Johaňšika z jeho poklidného spánku. „Co to k čertu. . .“, v duchu Johaňšík mudroval, když zapaloval příruční svícen. Už byl skoro u dveří, když se ostré a tentokrát ještě více naléhavé bouchání ozvalo znovu. Otevřel dveře a spatřil vyděšeného Martiena, který mu před obličejem začal mával zapečetěným dopisem. Jakmile přešlo momentální Johaňšíkovo zaskočení, popadl Martienovu ruku, zatáhl ho dovnitř a zavřel dveře. „Jsou pryč, jsou pryč. . .“, nakrápělým hlasem opakoval Martien. „Uklidni se, hochu, vše ti vysvětlím, ale nejdříve si musíš dát trochu čaje,“ konejšivě, ale s jistou dávkou urgency pravil Johaňšík. Odběhl do kuchyně a za okamžik se vrátil s šálkem. „Pij, uleví se ti,“ podal šálek Martienovi. Jakmile Martien smočil rty v čaji, ihned se cítil lépe, jakoby něco zahnilo jeho úzkost a strach.

„Teď mě dobře poslouvej, Martiene,“ začal Johaňšík. „V Algore už nejsi v bezpečí. Pečeť na dopise, dvouocasý lev, je znak Čarodějnického Vysokého Učení v Theorii, kde tvoji rodiče studovali a poté i učili,“ Johaňšík pokračoval. Martien cítil, že by měl být zaskočen, ale nedokázal udělat nic jiného, než pokývnout hlavou. „Dopis je adresován Andrejovi Drymoorovi, to je učitel na Fantastickém Institutu Thaumaturgie, je to velmi dobrý přítel tvých rodičů. Musíš se vydat do Theorie a dopis Drymoorovi doručit,“ vysvětloval Johaňšík. „Tví rodiče říkali, že tato situace skoro jistě nastane, ale pořád doufali, že k ní nedojde. Neboj se, určitě se s nimi zase shledáš, jen není jisté kdy a kde,“ s povzdechem ukončil Johaňšík svou promluvu.

Martien si nebyl jist, co vlastně teď cítí, zřejmě se nejednalo o obyčejný čaj. „Co mám tedy dělat?“ řekl zmateně Martien. Johaňšík odběhl do nějakého pokoje, Martien slyšel šramocení, občas nějaké cinknutí a bouchnutí. Záhy byl Johaňšík zpět, v rukou měl knihu a plátěnou tašku. „Teď se vydáš na cestu do Theorie, kde započneš studia,“ odpověděl Johaňšík. „Tady v tašce jsou sušenky, sněz jednu denně a měl bys být nasycený celý den,“ Johaňšík položil tašku na stůl. „Dále, tuhle knihu, Průvodce bludištěm magie, cestou přečti. Bude se ti to hodit, aby ses vůbec dostal ke škole,“ vysvětloval Johaňšík a položil ji vedle tašky. „Víc už ti pomoci nemohu, nesmíš teď ztrácet čas, sbal si jen to nejnnutnější a vyraž ještě teď. Drž se lesních stezek a cesta ti nepotrvá déle než týden,“ pronesl Johaňšík a pomohl Martienovi vstát. Podal mu tašku, knihu a dopis a vyprovodil ho ke dveřím. „Hodně štěstí, věřím, že na konci tvé cesty tě čeká světlo,“ rozloučil se Johaňšík.

Martien se nezmohl mluvit, jen Johaňšíkovi jako vždy podal ruku, otočil se a rozběhl se domů. Doma vzal jen svou brašnu, ani ji předtím nestihl vybalit, přidal do ní jen dopis, Průvodce a tašku sušenek. Dále již neotálel, vyšel z domu, přes zahradu, zavřel za sebou vrátka a šel přímým směrem k lesu. . .

Úloha č. 1

Silueta města



Odpověz Sfinze!

2 + 5 + 3 b

*Tato úloha je vyhodnocována automaticky. Je potřeba, aby výstup programu **přesně** korespondoval se specifikací výstupu níže. Jak odevzdávat tento typ úloh se můžeš dočíst na webových stránkách FIKSu pod záložkou „Jak řešit FIKS“.*

Martien putoval krajinou, když v tom potkal malíře, který se zamyšleně koukal na město v dále. Protože už dlouho s nikým nemluvil, rozhodl se ho oslovit.

„Pěkného dne přeji, copak dnes malujete?“

„Ále, zatím nic,“ odpověděl mu malíř. „Musím nakreslit siluetu tohoto města na velké plátno, a tak přemýšlím, kolik na to budu potřebovat barvy. Bohužel neumím moc dobře počítat, takže tu koukám už celý den a pořád se nemůžu dopočítat.“

Martienovi bylo malíře líto, a tak se nabídl, že mu spočítá, jak velkou plochu město zabere. Malíř nadšeně souhlasil a dokonce věděl, kde všechny domy ve městě stojí a jak jsou vysoké.

Všechny budovy mají tvar obdélníku a stojí na jedné rovině (podlaha má vždy y-ovou souřadnici 0). Střechy budov jsou paralelní s rovinou, na které domy stojí. Každá budova je zadána svojí výškou, počátečním a koncovým bodem při 2D pohledu z místa malíře (viz obrázky 1.1, 1.2 a 1.3).

Vstup

Na prvním řádku se nachází číslo T udávající počet vstupů, které budou následovat. Každý vstup na prvním řádku obsahuje číslo N udávající počet budov ve městě.

Následuje N řádků, každý řádek popisuje jednu budovu a skládá se ze tří celých čísel H L R , která jsou oddělena mezerou. H udává výšku budovy, L její levý okraj a R její pravý okraj. Rozsah parametrů N , H , L a R závisí na obtížnosti úlohy následovně:

- *Lehčí varianta (2 b)* – $1 \leq N \leq 4$, $1 \leq H \leq 5$, $1 \leq L < R \leq 10$
- *Střední varianta (5 b)* – $1 \leq N \leq 1000$, $1 \leq H \leq 1000$, $-500 \leq L < R \leq 500$
- *Těžší varianta (3 b)* – $1 \leq N \leq 100000$, $1 \leq H \leq 10^9$, $-10^9 \leq L < R \leq 10^9$

Lehčí varianta obsahuje 3 vstupy, střední 100 a těžší 10.

Výstup

Výstupem je T řádků.

Na každém řádku je výstup odpovídající jednomu vstupu – obsah siluety města (překrývající se části budov jsou započítány jednou).

Ukázkové vstupy

Vstup

```
1
1
2 2 4
```

Výstup

4

Vstup

```
1
3
3 -4 -3
2 -2 1
1 -1 3
```

Výstup

11

Vstup

```
1
5
3 -3 0
2 -1 1
4 2 4
2 3 7
3 6 8
```

Výstup

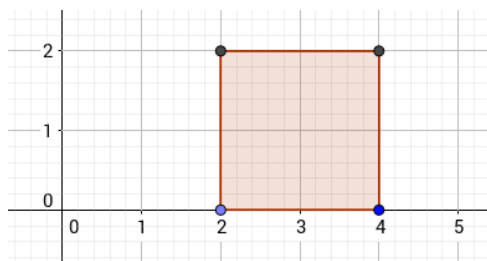
29

Vstup

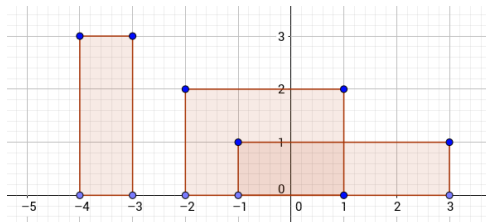
```
2
3
3 2 4
4 2 4
3 2 4
3
1 3 6
1 0 1
1 4 5
```

Výstup

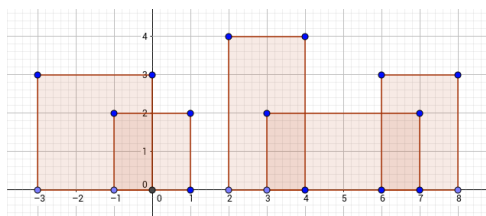
```
8
4
```



Obrázek 1.1 Nákres prvního vstupu



Obrázek 1.2 Nákres druhého vstupu



Obrázek 1.3 Nákres třetího vstupu

Úloha č. 2

Zbojníci



Rozmysli, popiš a naprogramuj!

10 b

Martien zrovna procházel vedle cestičky do starého lesa, když ho napadlo, že by si přes něj mohl zkrátit cestu. „Však to jsou jen pověry,“ řekl si, když si vzpomněl na příběh o temných monstrech, co les obývají.

Byl asi napůl cesty lesem, když se v koutku jeho oka něco mihlo. Zvedl se vítr. Za Martienem se něco šustlo, rychle se otočil, ale nic neobvyklého neviděl. Martien si začal dělat starosti, že příběhy možná nebyly jen pověry. Začalo mrholit. Martien dorazil k řece, přes kterou nebyl most. Zrovna, když se brodil kalnou vodou, se tak zpoza houští vynořila mohutná postava. „Nemá cenu utíkat,“ řekl muž stojící na břehu, kterému z čepice koukala kachní brka. Kolem Martiena se na obou březích začali objevovat další banditi. Několik banditů příběhlo za Martienem, vzali mu brašnu, vyhrožujíce noži a luky. Vyvedli Martiena na břeh k vůdci a ten se začal vyptávat. „Co děláš v našem lese?“ „Jenom procházím.“ „Kam máš namířeno?“ „Jdu do Théorie.“ „Do Čarodějnického Vysokého Učení?“ „Ano...“ Vůdce se na chvíli

odmlčel. „Kolik je odmocnina ze dvou?“ „Jedna celá čtyři jedna čtyři dva jedna...“ „To stačí.“ Přerušil vůdce Martiena a vzal si ho stranou od ostatních banditů.

Vůdce banditů Martienovi potichu řekl. „Možná mi budeš užitečný. Víš, nedávno jsem narazil na jeden problém a nevím si s ním rady. Když do zítřka najdeš řešení, tak tě pustím.“ Martien přikývnul a zeptal se, „co je to za problém?“

Vůdce spustil: „Když se s kolegy nudíme, tak si občas zahrajeme hru. Funguje tak, že si oba tajně rozmístíme dvě lodě na mřížku tak, aby se nepřekrývaly, a pak si po nich vzájemně střílíme a snažíme se je potopit.“ Kouknul na hlouček nudících se banditů a pokračoval. „Když jsem včera zase vyhrál, tak jsem si uvědomil, že pořád vyhrávám, protože každou hru rozestavím lodě jinak. Při čekání na lup se všichni hodně nudíme, a tak jsme taky už hodně hráli, a já začínám mít problém vymyslet nová rozestavení. Porad mi, kolik různých her si celkově zahraju?“

Vstup

Zadání jsou přirozená čísla NMB , kde N, M jsou výška a šířka hracího pole, a A, B jsou délky jednotlivých lodí.

Výstup

Výsledkem je jedno přirozené číslo – počet různých her, které si vůdce může zahrát. Pokud jsou lodě stejně dlouhé, tak jsou nerozlišitelné. V opačném případě jsou rozlišitelné.

Bodování:

Úloha je bodovaná podle správnosti jednotlivých částí řešení, kterými jsou:

- Rozbor všech případů umístění lodí – 4b
- Spočtení všech unikátních rozmístění – 4b
- Implementace spočtení všech unikátních rozmístění – 2b

Ukázkové vstupy

Vstup

3 3 2 3

Výstup

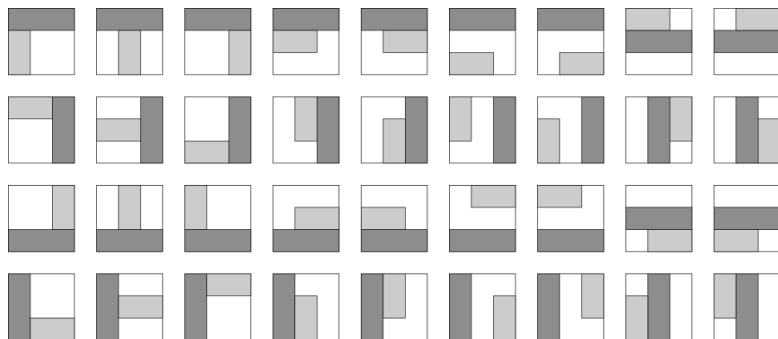
36

Vstup

5 5 2 2

Výstup

686



Obrázek 2.1 Nákres všech možností prvního vstupu

Úloha č. 3

Magické formule #1



Zamysli se! – seriálová úloha

10 b

Tato úloha je teoretického rázu, tvým úkolem zde není napsat program v klasickém slova smyslu. Namísto toho se po tobě chce vytvořit „magickou formuli“ dle specifikace níže. K formulí také přilož popis myšlenky, na které je založena.

Tato úloha je seriálová, což znamená, že se s magickými formulemi budeš setkávat po celý letošní ročník FIKSu. V každém z následujících kol využiješ znalosti z kol předcházejících.

S bandity za zády se Martien neohlížel a rychle se vydal na cestu. Po chvíli se ale stezka začala ztrácet a uvědomil si, že neví kudy dál. Jak tak bloudil hustým lesem, všiml si mezi stromy malého táboráku. Říkajíc si, že nemá co ztratit, se k němu vydal.

Přikradl se k ohni, kde uviděl osamělého starce u chatrně vypadajícího vozu, jak si opéká malé zvíře připomínající veverku. Přesvědčen, že nepředstavuje žádnou hrozbu, se za ním Martien vydal.

„Co tě ke mně přivádí, mladíku?“ zeptal se stařec.

„Ztratil jsem se a hledám cestu do Theorie,“ odvětil Martien.

„Jo tak do Theorie,“ uchechl se stařec, „mladý pán by se rád stal čarodějem, není tomu tak?“

„No a co když?“ ohradil se Martien podrážděně. „Potřebuji jenom znát směr a ostatní vás nemusí zajímat.“

Stařec jenom unaveně pokroutil hlavou. „Magie, to není jen tak,“ řekl, „chce to silnou vůli a chytrou mysl, jinak by tě to mohlo zlomit. Pokud na tom ale trváš, dobře. Vyzkouším tedy, zda jsi toho skutečně hoden, a jestli mě přesvědčíš, že máš na to, abys magii zkrotil, ukážu ti cestu.“

„Jak myslíte,“ řekl Martien rezignovaně, „co mám tedy udělat?“

„Uvedu tě do nejzákladnější oblasti magie, psaní magických formulí,“ odvětil stařec a rozpovídal se. . .

Psaní magických formulí se řídí přísnými zásadami. Formule samotná je jednou ze tří *konstrukcí*, které se v čarovných runách vyskytují: buďto je předmětem, zaklínadlem nebo aplikací. Pro zachování přehlednosti také lze formulí uzavřít do závorek.

Předmět, to je základní stavební kámen magických formulí. Může to být libovolný znak nebo slovo v latinské abecedě.

Zaklínadlo je činným prvkem formule, začíná vždy pěticipou hvězdou (★) následovanou nějakým předmětem, což tvoří hlavičku zaklínadla. Za hlavičkou pak píšeme tečku (·) a po ní následuje formule tvořící tělo zaklínadla. Princip fungování zaklínadla je jednoduchý: zaklínadlo Z se aktivuje spolu s nějakou formulí ϕ , říkáme, že ϕ se vloží do Z . Označíme-li předmět v hlavičce zaklínadla Z jako H , při aktivaci zaklínadla Z se nahradí všechny předměty H v těle zaklínadla Z formulí ϕ . Z celého zaklínadla potom zbude toto pozměněné tělo, hlavička a tečka za ní zmizí.

Třetí konstrukcí je *aplikace*, jež má mimo jiné za úkol aktivovat zaklínadla. Skládá se ze dvou formulí ϕ_1 a ϕ_2 napsaných za sebou, přičemž pokud je ϕ_1 zaklínadlem, ϕ_2 se vloží do ϕ_1 při aktivaci formule.

Kvůli přehlednosti a jednoznačnosti zápisu ještě povolíme formulí obalit párem závorek.

Všechny zásady psaní formulí se tedy dají shrnout do tří pravidel:

[formule] := [předmět] *nebo* [zaklínadlo] *nebo* [aplikace] *nebo* ([formule])

[zaklínadlo] := ★ [předmět] · [formule]

[aplikace] := [formule] [formule]

Lépe je to vidět v praxi. Vezměme následující formulí:

(★ zvíře · jezdec zvíře) kůň

Celá formule v tomto případě tvoří aplikaci zaklínadla se zápisem (★ zvíře · jezdec zvíře) na předmět „kůň“. Vyhodnocení aplikací ve formulí se říká redukce. V tomto případě je v hlavičce aplikovaného zaklínadla předmět „zvíře“. Redukci tedy provedeme tak, že všechna zvířata v těle zaklínadla se nahradí koněm a jejím výsledkem bude formule

jezdec kůň

V originálním výrazu si také lze povšimnout využití závorek, které slouží k rozlišení formulí napsaných za sebou. Pokud žádné závorky nejsou uvedeny, skládání aplikací je asociativní zleva, což znamená, že formule $a b c d$ se vyhodnotí jako $((a b) c) d$.

Zápis se také dá rozšířit o zaklínadla s více předměty v hlavičce. Formálně bychom mohli vytvořit zaklínadlo se dvěma hlavičkovými předměty následovně:

$$\star a \cdot (\star b \cdot [\text{tělo}])$$

Tento zápis je značně zdlouhavý a proto zavedeme v zápisu formulí toto zkrácení:

$$\star a b \cdot [\text{tělo}]$$

Nedoporučuje se pojmenovávat předměty ve dvou různých hlavičkách stejně. Pravidlem je, že nadřazená je *vnitřní* hlavička, takže například formule

$$\star a \cdot (\star a \cdot a) x y$$

se zredukuje na

$$(\star a \cdot a) y$$

a pak na y , ale podobný zápis může vést k nepříjemnému zmatku. Také je důležité uvědomit si, že předměty v hlavičce lze (spolu s odpovídajícími předměty v těle) libovolně přejmenovávat. U zaklínadel je rozhodující jejich funkčnost a například formule $\star a b \cdot b a$ a $\star x y \cdot y x$ jsou ekvivalentní.

Čarovná čísla

Jedním z nejzákladnějších využití kouzelných formulí je počítání. Mágové v dávných dobách používali k vyjádření čísel předměty pojmenované „1“, „2“ a podobně, ale rychle zjistili že s takovým přístupem není možné vykonávat ani nejjednodušší výpočty. Formule nejsou schopné zpracovat předměty na základě jejich jména, mohou je jenom přesouvat dosazováním do zaklínadel.

Moderní magie tedy nevyužívá pro čísla předměty, ale zaklínadla. Jako základní příklad uvedu nulu, která se dá definovat jako

$$0 := \star a b \cdot b$$

Další čísla definujeme takto:

$$\begin{aligned} 1 &:= \star a b \cdot a(b) \\ 2 &:= \star a b \cdot a(a(b)) \\ 3 &:= \star a b \cdot a(a(a(b))) \\ &\dots \end{aligned}$$

Definice vyšších hodnot je pak analogická, u čísla n se n -krát na b aplikuje a .

Kouzelné počty

Jakmile máme definovaná přirozená čísla, můžeme na nich provádět mnoho operací. Jako nejjednodušší se dá uvést zaklínadlo, kterým se pomocí aplikace dá zvýšit libovolné číslo o 1:

$$\mathbf{INC} := \star abc \cdot b(abc)$$

Na levé straně zvyšovacího zaklínadla a čísel je uvedený zkrácený tvar, který se dá použít pro zpráhlednění zápisů. Funkčnost zvyšovacího zaklínadla můžeme demonstrovat na formuli **INC 2**, která by po správnosti měla být ekvivalentní formuli **3**.

$$\mathbf{INC\ 2} = (\star abc \cdot b(abc)) (\star xy \cdot x(x(y)))$$

Formuli **2** můžeme dosadit za a v hlavičce zaklínadla **INC**:

$$(\star bc \cdot b((\star xy \cdot x(x(y)))bc))$$

Pak můžeme vyhodnotit zaklínadlo ve vnitřku, které nyní lze aplikovat na b a c :

$$(\star bc \cdot b(b(b(c))))$$

A výsledkem je zaklínadlo reprezentující hodnotu **3**.

Jestě zajímavější je, že zaklínadlo **INC** lze také využít pro sčítání. Kdybychom na něj a jiné číslo, řekněme **2**, aplikovali jiné číslo, například **3**, dostaneme formuli ve tvaru

$$\mathbf{3\ INC\ 2}$$

a ta je skutečně ekvivalentní **5**, což se dá podobně snadno ověřit. Princip funkčnosti je ale zřejmý, číslo n je jenom zaklínadlo, které aplikuje první předmět v hlavičce n -krát na druhý. Jestliže tedy do n vložíme **INC** a zaklínadlo reprezentující číslo m , v podstatě n -krát na m aplikujeme zvýšení o 1 a výsledek má tedy číselnou hodnotu $m + n$.

„No dobře, tak řekněme, že už tomu začínám rozumět,“ řekl Martien, potlačuje závrať. „Můžu teď už jít?“

„Ne tak rychle,“ odvětil stařec, „myslíš, že jenom tímhle někoho na akademii oslníš?“

„No, asi jo?“ zkusil to Martien, ale stařec se na něho jen zamračil.

„Tohle tam mají v malíku i ti nejprostější novicové! Jestli chceš znát cestu dál, budeš muset přijít na náročnější úkol, a to jak čarovná čísla násobit,“ řekl stařec.

„Výborně,“ zakouel očima Martien, „proč ne rovnou odečítat nebo dělit?“

„Odčítání není zlý nápad,“ zamyslel se stařec, „ale potřeboval bys k němu celá čísla, ne jenom přirozená. Ale,“ usmál se, „kdybys přišel na způsob, jak reprezentovat celá čísla, šlo by ti to už samo!“

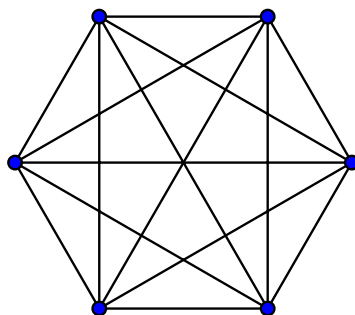
Vypadá to na dlouhou noc, pomyslel si Martien a pustil se do přemýšlení.

Soutěžní úloha

První částí úlohy je navrhnout obecný způsob, jak vynásobit dvě přirozená čísla reprezentovaná zaklínadly. Výsledkem operace tedy musí být jediné zaklínadlo, reprezentující násobek originálních dvou čísel. Řešení také musí obsahovat popis, proč uvedený postup funguje. Za vyřešení této části lze získat až 7 bodů.

Bonusovou druhou částí je nalezení způsobu, jak reprezentovat celá čísla (tedy i záporná) a popsat k nim operaci odčítání. Poradíme, že jestli zjistíte, jak převrátit znaménko u libovolného čísla, odčítání lze jednoduše odvodit z již popsání sčítání. Za vyřešení bonusové části lze získat až 3 body navíc.

Úloha č. 4 Močál



Odpověz Sfinze!

10 b

*Tato úloha je vyhodnocována automaticky. Je potřeba, aby výstup programu **přesně** korespondoval se specifikací výstupu níže. Jak odevzdávat tento typ úloh se můžeš dočíst na webových stránkách FIKSu pod záložkou „Jak řešit FIKS“.*

Čtvrtý den dobrodružného putování do Théorie za Andrejem Drymoorem přichází Martien k velkému močálu u temného lesa. U močálu potká neznámého fousatého pána.

„Pane, nevíte jestli se to dá nějak přejít?“ zeptá se Martien s ustaraným výrazem ve tváři. Fousatý pán zvedl obočí a praví. „Močál je více nebezpečný, než na pohled vypadá. Pokud ho dobře neznáte, sám byste při pokusu ho přejít pravděpodobně neuspěl. Buď byste to vzdal, nebo byste zahynul. Na cestě je plno skrytých nebezpečí. Pomohu vám bezpečně močálem přejít, ale potřeboval bych od vás laskavost.“

Martien zaujatý kladnými slovy se vyptává: „Co byste potřeboval za laskavost?“ Fousatý pán pokračuje. „Když už budeš na druhé straně, budeš kousek od Čarodějnického Vysokého Učení v Théorii. Potřeboval bych tam doručit dopis Pepie Pinkievovi,“ vysvětlil fousatý pán.

„Jdu přímo do Čarodějnického Vysokého Učení v Théorii, dejte mi váš dopis. Já vám ho doručím,“ přislíbil mu Martien. Fousatý pán se na chvíli zamyslel. „No, já ten dopis ještě nemám úplně dopsaný, sbírám informace o tomhle prostředí a posílám

je Pepiemu, který je vkládá do svazků. Potřebuji spočítat, kolik je v močálu cest délky dva, pomůžeš mi s tím?“

Močál lze reprezentovat jako množinu ostrůvků a množinu přechodů. Ostrůvek je pevné místo, na kterém lze bezpečně stát. Přechod je vždy obousměrný a je určen dvojicí různých ostrůvků. Pokud je možné z ostrůvku a přeskočit na ostrůvek b , potom v množině přechodů bude dvojice buď (a, b) nebo (b, a) . Cesta je posloupnost ostrůvků, kde se žádné dva ostrůvky neopakují a mezi po sobě jdoucími ostrůvky vždy existuje přechod. Například pro ostrůvky $\{1, 2, 3, 4\}$ a přechody

$$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$

posloupnost $(1, 3, 4)$ není cesta (neexistuje přechod mezi 1 a 3), posloupnost $(1, 2, 3, 2)$ není cesta (ostrov 2 se opakuje) a posloupnost $(1, 4, 3, 2)$ je cesta. Délka cesty je počet přechodů, které cesta obsahuje. Cesta $(1, 4, 3, 2)$ má délku 3.

Úkolem je spočítat v močálu všechny cesty délky dva. Pokud jsme započítali cestu z a do c přes b , již nezapočítáváme obrácenou cestu (z c do a přes b). Počítáme všechny cesty, i když se některé částečně překrývají.

Berme však na vědomí, že z jednoho ostrůvku nemusí být možné navštívit některé jiné ostrůvky, protože k nim nemusí vést cesta.

Vstup

Ve vstupním souboru je deset testů. Každý test má na prvním řádku čísla n a m udávající počet ostrůvků a počet přechodů jednoho močálu. Následuje m řádků, každý obsahuje dvě různá čísla a a b ($1 \leq a \leq n$ a $1 \leq b \leq m$), která znamenají, že mezi ostrůvky a a b vede přechod.

Za každý správně spočtený test je jeden bod, na první chybě se počítadlo zastaví.

- *První 4 testy* – $1 \leq n \leq 20$, $1 \leq m \leq 190$
- *Prvních 6 testů* – $1 \leq n \leq 140$, $1 \leq m \leq 9730$
- *Všech 10 testů* – $1 \leq n \leq 50000$, $1 \leq m \leq 1000000$

Výstup

Pro každý test vypiš na samostatném řádku jedno číslo – počet cest délky dva v močálu.

Ukázkové vstupy

Vstup

6 7
1 2
2 3
3 1
2 4
4 5
5 6
6 2

Výstup

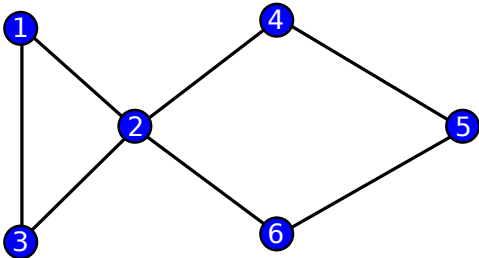
11

Vstup

6 15
1 2
1 3
1 4
1 5
1 6
2 3
2 4
2 5
2 6
3 4
3 5
3 6
4 5
4 6
5 6

Výstup

60



Obrázek 4.1 Nákres prvního vstupu

Úloha č. 5

Vstupní zkouška



Rozmysli, popiš a naprogramuj!

10 b

Byla již noc, když Martien dorazil k vnější bráně Fantastického Institutu Thaumaturgie (FIT). Bránu osvětlovalo pět pochodní pravidelně rozmístěných po jejím obvodu.

„*Prokaž se...*“ zaznělo Martienovi v hlavě. S leknutím se rozhlédl okolo sebe, ale nikoho neviděl. Jedna pochodeň zhasla. „*Prokaž se...*“ opět mu zaznělo v hlavě, tentokrát hlasitěji. V tu ránu si Martien uvědomil, co se děje. O této bráně totiž četl v Průvodci bludištěm magie – jedná se o vstupní zkoušku. „Jmenuji se Martien Katcher a nesu dopis pro učitele Andreje Drymoora“, pravil rozhodným hlasem a ukázal bráně dopis s pečeti. Pochodeň se opět rozsvítila.

„*Najdi to nejelegantnější...*“ pronesl již opět klidným tónem hlas v Martienovo hlavě a na bráně se rozsvítilo spoustu symbolů v pravidelné obdélníkové mřížce.

V Průvodci se psalo, že ti, kteří magii již ovládají, ji snadno prolomí, ostatní musí ovšem dokázat, že jsou hodni na FIT vůbec vstoupit. Úkolem je v mřížce najít to nejelegantnější kouzlo, což znamená, že z mřížky je třeba vybrat souvislou obdélníkovou podmřížku, pro kterou platí, že se symboly v ní dají přeskládat do palindromu. Palindrom je řetězec symbolů, který lze přečíst stejně ať už zleva doprava nebo zprava doleva (tedy „0110“, „999“, „0“ jsou palindromy, ale „123“, „0011“ nejsou). Symboly na bráně jsou pouze číslice 0 až 9. Odpovědí je levý dolní a pravý horní roh obdélníkové podmřížky (za předpokladu, že $(1, 1)$ je levý dolní roh a (M, N) pravý horní roh mřížky na bráně), která je největší možná a symboly v ní se dají přeskládat na palindrom. Pokud je takových odpovědí více, lze říct libovolnou. Odpovědět se musí dříve, než zhasne všech pět pochodní a první právě zhasla... Martien se ale nezalekl a pustil se do práce.

Vstup

Na prvním řádku vstupu budou dvě čísla N , M – počet řádků a počet sloupců mřížky na bráně. Uvažujte, že $1 \leq N \cdot M \leq 10^5$. Na každém z následujících N řádků je vždy M číslic z rozahu 0 až 9.

Výstup

Výstupem jsou pouze čtyři celá čísla L , D , P , H označující levý dolní roh (L, D) a pravý horní roh (P, H) vybrané podmřížky splňující podmínky zkoušky.

Ukázkové vstupy

Vstup

```
3 4
1 1 1 1
1 0 0 1
1 1 1 1
```

Výstup

```
1 1 4 3
```

Vstup

```
3 3
1 2 3
4 5 6
7 6 5
```

Výstup

```
2 1 3 2
```

Vstup

```
1 6
6 2 3 2 1 5
```

Výstup

```
2 1 4 1
```

Vstup

```
2 2
1 2
3 4
```

Výstup

```
1 1 1 1
```

Vysvětlení ukázkového vstupu

V prvním vstupu je odpovědí celá mřížka, jelikož z ní lze sestavit např. palindrom „01111111110“. V druhém vstupu je největší podmřížkou pravý dolní podčtverec, ze kterého lze poskládat např. palindrom „5665“. Ve třetím vstupu je největším palindromem, který můžeme poskládat „232“. V posledním vstupu nelze poskládat větší palindrom než velikosti jedna.