

## Úloha č. 3

### Cemositové krystaly

Zamysli se!

10 b

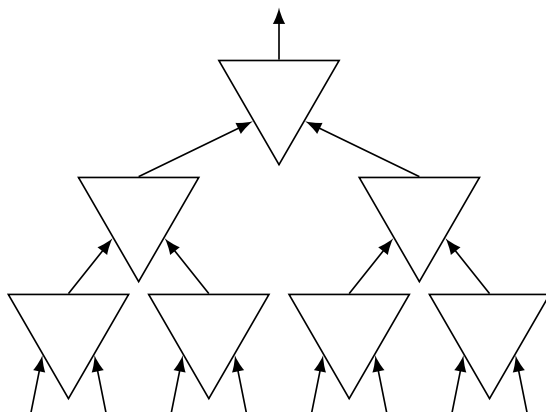
*Tato úloha je čistě teoretická, tvým úkolem zde není napsat program. Namísto toho si dej záležet na kvalitním slovním popisu, kde mimo jiné jasně zdůvodníš, proč tvůj postup skutečně bude fungovat.*

Některé úkoly pro studenty jsou záměrně vymyšlené tak, aby je nejen naučily novým věcem, ale také pomohly provozu školy. Jeden takový úkol si pro tebe připravil učitel Čarodějných Artefaktů a Objektů, Merlin Ko'lies v desátém patře. Tam se studují mocné magické předměty, které jsou základem veškerých kouzel a bez kterých by celé kouzelnické umění nemohlo fungovat.

Merlin tě zavedl do velké místnosti, ve které se nachází značné množství beden z krásně vyřezávaného dřeva. Každá krabice má několik otvorů na jedné straně a jediný otvor na straně druhé. Merlin Martienovi prozradil, že v krabicích se ukrývají Cemositové krystaly, které mají pozoruhodné magické optické vlastnosti. Každý krystal má tři kouzelné stěny, dvě stěny vstupní a jednu výstupní. Když se na dvě vstupní posvítí, světlo vyjde ven z třetí, výstupní, stěny.

Doprostřed krystalů jsou magicky vloženy runy z určité horniny. Krystaly s **Andezito**vými runami (zkráceně AND) vyzařují světlo pouze tehdy, pokud se posvítí na obě vstupní stěny zároveň. Krystaly s **Dioritovými** runami (zkráceně OR) také vyzařují světlo, když se posvítí na obě stěny, ale stačí, když se posvítí i jen na jednu z nich.

Dovnitř beden ovšem není vidět a štítky, na kterých byl napsán jejich obsah, jsou už dávno nečitelné. Kouzla na obranu před zloději navíc znemožňují bedny otevřít, nebo nahlédnout na jejich obsah pomocí magie. Naštěstí si Merlin stále pamatuje, jak jsou krystaly uvnitř uspořádané. Krystaly tvoří uvnitř jakousi pyramidu, kdy výstupy dvojice sousedních krystalů jsou nasměrované na vstupy dalšího krystalu nad nimi. V nejvyšším patře je tedy jeden krystal, v patře pod ním dva, v dalších  $2^2$ ,  $2^3$ ,  $2^4 \dots 2^{n-1}$ , kde  $n$  je počet pater pyramidy. Vstupy nejnižších krystalů jsou viditelné skrz otvory na jedné straně bedny a výstup horního krystalu je vidět na straně druhé.



Merlin má několik magických svíček, kterými může osvětlit libovolnou kombinaci otvorů v bedně. V závislosti na kombinaci osvětlených otvorů a uspořádání krystalů uvnitř bedny se světlo buď ukáže, nebo neukáže ve výstupním otvoru bedny. Tímto způsobem chce Merlin zjistit, které krystaly v bedně jsou jakého typu. Svíčky jsou ovšem poměrně těžké a jejich přerovnávání trvá nějaký čas. Proto je potřeba přijít na co nejefektivnější způsob, jak pomocí co nejmenšího počtu takovýchto testů zjistit druh každého krystalu v bedně.

Krystaly číslujeme od nejvyššího a zleva, tzn. horní krystal v prvním patře má vždy číslo 0, krystaly v druhém patře zleva 1 a 2, krystaly v dalším patře 3, 4, 5, 6 a tak dále. Vstupních otvorů v bedně je vždy  $2^n$ .

Vymyslete a popište univerzální postup, jak za co nejmenší množství testů určit typ všech krystalů  $0 \dots 2^n - 2$  v bedně. Nejprve se sami zamyslete nad řešením pro počet pater  $n = 4$  a poté podrobně popište algoritmus pro libovolné  $n$ .