

Úloha č. 5

Prohození věží



Zamysli se!

10 b

Tato úloha je čistě teoretická, tvým úkolem zde není napsat program. Namísto toho si dej záležet na kvalitním slovním popisu, kde mimo jiné jasně zdůvodníš, proč tvůj postup skutečně bude fungovat.

Martien dokončil své kouzlo. Černý led kolem Dahliovy hole popraskal a hůl se sama vznesla pár centimetrů nad zem. Martien se pousmál, otřel si pot z čela a natáhl se po holi. V okamžiku, kdy se jí chopil, se zničeho nic přenesl zpět do místnosti poslední zkoušky a před ním stál Dahlia.

„Dobrá práce, Martiene, ta hůl k tobě sedí,“ pokyvoval Dahlia. „Teď ji už jen správně použít. Martiene, já sám hořce pochopil, že samotný Strážce nedokáže rovnováhu opět nastolit. Budeš potřebovat armádu,“ Dahlia položil ruku na Martienovo rameno, „a tu si teď k sobě přivedeš. Prohodíš totiž světelný a stínový FIT se všemi bytostmi, které ho obývají.“ Martiena už jen málo co mohlo překvapit, tohle byla taková třešnička na pomyslném dortu. „A jak to mám provést?“ tázal se Martien. „Věť svému Průvodci, Martiene, moc té knihy roste spolu s tvou vlastní,“ jen co to dořekl, Dahlia opět zmizel. Martien už neváhal. Vytáhl Průvodce, listoval a narazil na kapitolu, kterou před tím nikdy neviděl. V ní se praví, že je dobré začít nejdříve nečím jednodušším. . .

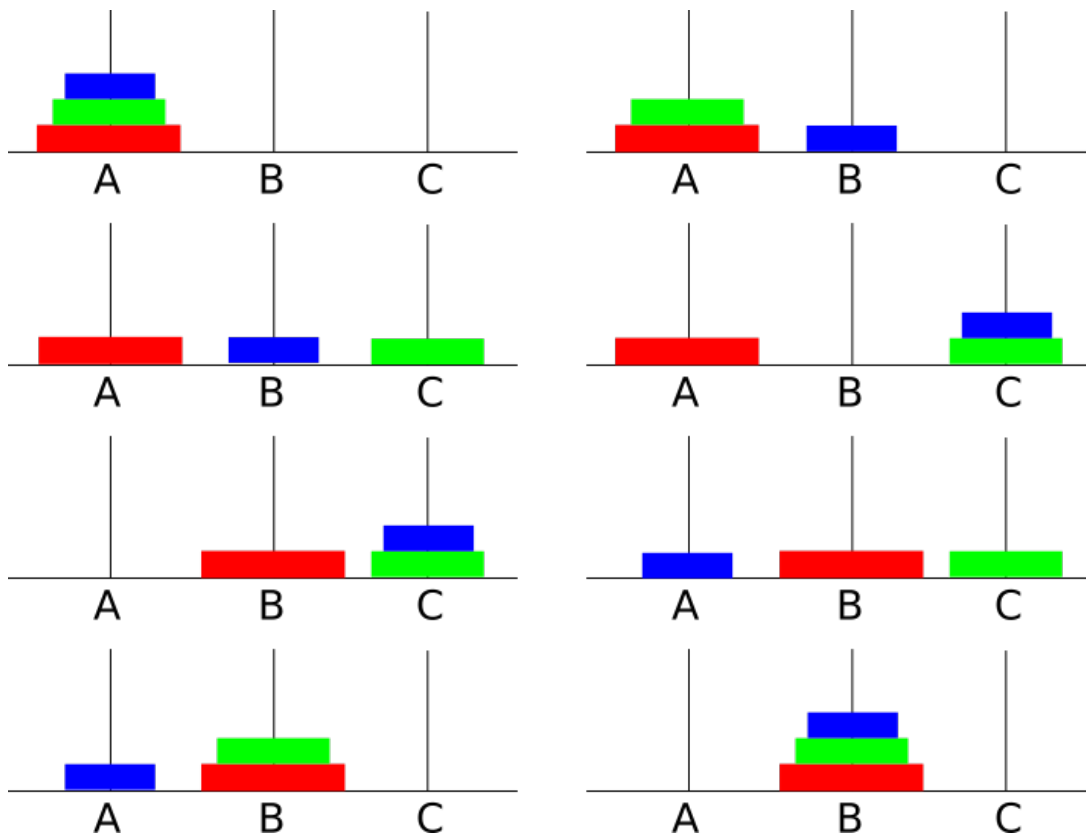
Martien si vyčaroval modýlek věže FITu a tři krabičky A, B a C. Věž FITu budeme reprezentovat n kulatými disky – jeden za každé patro. Čím vyšší je patro věže, tím menší je disk, věž se tedy ostře zužuje směrem vzhůru. Ze strukturálních důvodů ve všech krocích kouzla musí platit, že disk v patře p je menší než disk v patře $(p - 1)$ a větší než disk v patře $(p + 1)$. Z počátku se FIT nachází v krabici A, krabice B a C jsou prázdné. Cílem je přesunout FIT z A do B a k dispozici máme pouze následující operaci: zvolit v jedné krabici nejvrchnější disk a přesunout jej do jiné krabice, musí se však zachovat strukturální integrita libovolné "podvěže", tzn. pro libovolný disk v libovolné krabici platí, že pokud je pod ním disk, tak musí být ostře větší a pokud je nad ním disk, tak musí být ostře menší.

Martien si vzpomněl, že tuto úlohu už na FITu řešil v rámci výuky. Řešení vypadá následujícím způsobem:

1. přesuň(koho, odkud, kam, přes):
2. pokud je věž v "odkud" jednopatrová, rovnou ji přesuň na "kam"
3. jinak:
4. použij přesuň(celou věž kromě nejnižšího disku, odkud, přes, kam)
5. jediný zbylý disk v odkud přesuň do krabice "kam"
6. použij přesuň(celou věž, přes, kam, odkud)

Je-li věž jednopatrová, pak stačí jednodiskovou věž rovnou přesunout do cíle. Pokud je věž vícepatrová, pak se použije kouzlo *přesuň* na 2. až nejvyšší patro k přesunutí věže do krabice *přes*, nejvrchnější disk v krabici *odkud* se přesune do krabice *kam* a kouzlem *přesuň* se opět použije na přesunutí celé věže z krabice *přes* do krabice *kam*. Funkčnost je založená na principu znovuykouzlení, kouzlo se tedy vyčaruje samo na sebe na věž, které chybí nejprizemnější patro, čímž vznikne identická úloha akorát s menším vstupem. Aplikování

znovuvykouzení se provádí pořád dokola, dokud se úloha nezredukuje na jednopatrovou věž, kterou lze triviálně vyřešit. Martien si však není jist časovou a paměťovou složitostí tohoto kouzla. Vaší první úlohou je odvodit časovou a paměťovou složitost kouzla “přesuň” vůči výšce věže n . Tato část je hodnocena 1 bodem.



Obrázek 5.1 Ukázka pro 3 patrovou věž

Jakmile Martien pochopil základní úlohu, pokračoval v Průvodci dál. Nyní je zakázán přímý přesun disku z krabice A do B. Toto je také Vaší úlohou. Navrhněte úpravu kouzla *přesuň* tak, aby nepoužívalo zakázaný přesun (který je na řádce 5 v přepisu kouzla). I zde odvodte časovou a paměťovou složitost kouzla vůči výšce věže n . Tato část je hodnocena 4 body.

Martien se najednou cítil mocněji, než kdy dřív. Už jen přijít na poslední část – samotné prohazovací zaklínadlo.

Každá z věží je pro účely Martienova zaklínadla reprezentována n kulatými disky obdobně jako v úvodní úloze. Patra také číslujeme obdobně. Pro všechny disky platí, že disk v patře p je menší než disk v patře $(p-1)$ a větší než disk v patře $(p+1)$. Kromě věží máme také 3 prostory: jeden pro zemi světla, jeden pro zemi stínů a jeden pro zemi prázdnoty. Z počátku se věž FITu nachází v světelném prostoru, věž stínového FITu v stínovém prostoru a země prázdnoty je prázdná. V rámci kouzla může Martien přesunout vždy nejvrchnější disk v jednom z prostorů do jiného. Nesmí jej však přesunout do prostoru, ve kterém je nejvrchnější disk menší než právě přesouvaný disk. Přesun světelného disku velikosti k na stínový disk totožné velikosti k povolený. Totéž platí i pro přesun stínového disku na stejně velký světelný disk.

Vaší úlohou je pomoci Martieni vymyslet co nejefektivnější postup, kterým docílí toho, že na konci bude celá věž FITu ve stínovém prostoru, celá věž stínového FITu ve světelném prostoru a země prázdnoty bude prázdná za podmínek v předchozím odstavci a pouze pomocí operace “přesunout nejvrchnější disk z jednoho prostoru do jiného”. I zde odvodte časovou a paměťovou složitost kouzla vůči výšce věže světla n . Tato část je hodnocena 5 body.